

Formule sommatoire de Poisson

Théorème: Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $f^{(k)}(x) = O\left(\frac{1}{x^k}\right)$, $k \in \{0, 1\}$. Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi n) e^{2i\pi n x}.$$

On considère $F: x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) \in \mathbb{C}$

① F bien défini et C^1 ② Calcul $c_k(F)$ ③ Conclusion

① Puisque $\forall k \in \{0, 1\}$, $f^{(k)}(x) = O\left(\frac{1}{x^k}\right)$, $\exists M > 0$ et $\exists A > 0$ tels que $\forall |x| > A$, $|f^{(k)}(x)| \leq \frac{M}{x^k}$.
Alors, $\forall R > 0$ et $\forall x \in [-R, R]$ on a $\forall n \in \mathbb{Z}$ $(x+n)^2 \geq (|n| - |x|)^2 \geq (|n| - R)^2$. On en déduit pour $|n| > R + A$, $|f^{(k)}(x+n)| \leq \frac{M}{(|n| - R)^2}$. En $k=0$, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$ converge sur $[-R, R]$ normalement, donc simplement et F bien défini. En $k=1$, par théorème de dérivation des séries, F est C^1 sur $[-R, R]$, donc sur $\mathbb{R}$.

② Puisque $\forall N \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\sum_{n=-N}^N f(x+n+1) = \sum_{n=-N-1}^{N+1} f(x+n)$, en faisant $N \rightarrow \infty$ $F(x+1) = F(x)$.

Donc F est 1-périodique, et est de plus L^1 . On a donc $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} c_k(F) &= \int_0^1 F(t) e^{-2i\pi k t} dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t+n) e^{-2i\pi k t} \right) dt \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\int_0^1 f(t+n) e^{-2i\pi k t} dt \right) \quad \text{car converge uniformément sur } [0, 1] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(x) e^{-2i\pi k x} dx \quad t+n=x \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi k x} dx = \hat{f}(2\pi k) \end{aligned}$$

③ Puisque F est C^1 , d'après Dirichlet on a la série de Fourier $(S_k(F))_k$ converge normalement vers F . Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = F(x) = S(F)(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi n) e^{2i\pi n x}$.

Application: On pose $\forall t > 0$, $\Theta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t}$. Alors $\Theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \Theta\left(\frac{1}{t}\right)$.

On pose $\forall \alpha > 0$, $g_\alpha: x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\alpha x^2}$. ① Théorème avec g_α ② Conclusion $\alpha = \pi t$

① Puisque g_α vérifie les hypothèses du théorème, on a $\forall \xi \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \hat{g}_\alpha(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} e^{-i x \xi} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(2\alpha x)^2}{2}} e^{-i x \xi} d\left(\frac{2\alpha x}{2}\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-i \frac{u}{2\alpha} \xi} \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} du = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \hat{g}_2\left(\frac{\xi}{\sqrt{2\alpha}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \sqrt{2\pi} g_2\left(\frac{\xi}{\sqrt{2\alpha}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}. \end{aligned}$$

Donc, en $x=0$ on a $\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\alpha n^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{(2\alpha n)^2}{4\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2}$.

② Alors, $\forall t > 0$ avec $\alpha = \pi t$ on a $\Theta(t) = \sqrt{\frac{\pi}{\pi t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi n^2}{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \Theta\left(\frac{1}{t}\right)$.

Def: Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}: \xi \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx \in \mathbb{C}$.

Rq: Si $J: x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} x^{1/2} e^{-\pi n^2 x}$, alors $J(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{x}}$, $\Theta(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$.

On a $\forall x > 0$, $\Theta(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (e^{-\pi n^2 x})^{1/2} = J(e^{-\pi x})$. Donc d'après l'application,

$J(e^{-\pi x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Theta\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} J\left(e^{\frac{\pi}{x}}\right) \quad \forall x > 0$. On a donc $\forall y \in]0, 1[$, $y = e^{-\pi x}$, $x = \frac{\ln(y)}{-\pi}$

$J(y) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\ln(y)}{-\pi}}} J\left(e^{\frac{\pi}{\ln(y)}}$

et puisque $\ln(1+u) \sim u$, $\ln(1-(1-y)) = \ln(y) \sim -(1-y)$

Donc $J(y) \underset{y \rightarrow 1}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{1-y}}$. On en déduit grâce à $\Theta(x) = J(e^{-\pi x})$, $\forall x > 0$

$\Theta(x) = J(e^{-\pi x}) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{1-e^{-\pi x}}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{\pi x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ car $1-e^{-\pi x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1-(1-\pi x + o(x))$

Théorème: $\mathcal{F}: \mathcal{Y}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{Y}(\mathbb{R})$ isomorphisme

Soit $f \in \mathcal{Y}(\mathbb{R})$. On a $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-i\xi x} f(x) \in C^\infty$ et de dérivée $|(i\xi)^k e^{-i\xi x} f(x)| \leq |\xi|^k |f(x)| \in L^1(\mathbb{R})$

($f \in \mathcal{Y}(\mathbb{R})$, $n \mapsto |\xi|^n |f(x)| \in L^1(\mathbb{R})$ et $|\xi|^n |f(x)| \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0$). Donc $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall \epsilon > 0$

$|\xi|^k |\hat{f}(\xi)| = |(i\xi)^k \widehat{f(x)}| = \widehat{|(i\xi)^k f(x)|} \leq \widehat{|(i\xi)^k f(x)|}_1 \leq \| (i\xi)^k f \|_1 < \infty$. Donc $\hat{f} \in \mathcal{Y}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$.

Soit $\hat{f}: \xi \mapsto \hat{f}(2\pi\xi)$. Par Poisson $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi n) e^{2\pi i n x}$, donc en $x=0$

$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)$. Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé, et $\psi_t = f e^{2\pi i t x} \in \mathcal{Y}(\mathbb{R})$ ($\|\psi_t\|_1 = \|f\|_1 e^{2\pi i t x} = \|f\|_1$). Donc

$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_t(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\psi}_t(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\psi}_t(n)$. Où $\tilde{\psi}_t(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) e^{2\pi i y x} e^{2\pi i y t} dy = \hat{f}(x-t) = \tau_{-t} \hat{f}(x)$. Donc

$\tilde{\psi}_t = \tau_{-t} \hat{f} = e^{-2\pi i t x} \hat{f}$ et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) e^{2\pi i n t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{-2\pi i n t}$. Par cvn sur $[0, 1]$, on a

$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \int_0^1 e^{2\pi i n t} dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \int_0^1 e^{-2\pi i n t} dt$ ie $f(0) = \hat{f}(0) \quad \forall f \in \mathcal{Y}(\mathbb{R})$. Soit $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_x = \tau_x f$

on a $\varphi_x \in \mathcal{Y}(\mathbb{R})$ donc $\varphi_x(0) = f(x) = \tilde{\varphi}_x(0) = \tau_x \hat{f}(0) = e^{-2\pi i x t} \hat{f}(0) = \tau_x \hat{f}(0) = \hat{f}(x)$.

C'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(2\pi t) e^{-2\pi i x t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) e^{-i x y} dy = \frac{1}{2\pi} \hat{\hat{f}}(x)$. Alors $\forall f \in \mathcal{Y}(\mathbb{R})$

$g = \frac{1}{2\pi} \hat{f} \in \mathcal{Y}(\mathbb{R})$ donne $\mathcal{F}(g) = f$ et $\mathcal{F}$ bijectif, continue ($\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$) et $\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}$ continue